DS de mathématiques n°11

Probabilités – Corrigé

Noté sur 61,5 pts ±5 pts pour le soin et la clarté,
puis la note est ramené sur 20 en multipliant par 20/55.

/16

1 Pour s'échauffer

Une urne contient 5 boules blanches et 5 boules rouges. On fait deux tirages successifs :

- premier tirage : on tire simultanément 2 boules, que l'on met de côté ;
- second tirage : on tire simultanément 2 boules parmi les 8 boules restantes.

On se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ correspondant à cette expérience (on ne cherchera pas à préciser Ω ou $\mathbb{P}$). Pour tout $i \in \{0,1,2\}$, on note B_i l'événement « le premier tirage contient exactement i boules blanches », et C l'événement « le second tirage contient exactement deux boules blanches ».

1) Calculer le nombre de façons possibles de tirer simultanément 2 boules (indépendamment de leur couleur) lors du premier tirage. /1

Il y en a $\dbinom{10}{2} = \dfrac{10\times 9}{2!} = \boxed{45}$

2) Calculer $\mathbb{P}(B_i)$ pour tout $i \in \{0,1,2\}$ et vérifier que $\mathbb{P}(B_0)+\mathbb{P}(B_1)+\mathbb{P}(B_2) = 1$. /3

Calculons $\mathbb{P}(B_0)$. B_0 est réalisé lorsqu'on a tiré 2 boules rouges parmi les 5, il y a donc $\dbinom{5}{2}$ tirages possibles. Ainsi :

$$\mathbb{P}(B_0) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{\frac{5\times4\times3}{3!}}{45} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$$

B_1 est réalisé lorsqu'on tire une boule blanche parmi 5 et une boule noire parmi 5, on a donc $\dbinom{5}{1}\dbinom{5}{1}$ tirages possibles. Ainsi :

$$\mathbb{P}(B_1) = \frac{\binom{5}{1}\binom{5}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{5\times 5}{45} = \frac{5}{9}$$

Le calcul de $\mathbb{P}(B_2)$ est similaire à celui de $\mathbb{P}(B_0)$ et donne $\mathbb{P}(B_2) = \dfrac{2}{9}$. On vérifie que

$$\sum_{i=0}^{2} \mathbb{P}(B_i) = \frac{2}{9} + \frac{5}{9} + \frac{2}{9} = 1$$

/3 **3)** Calculer $\mathbb{P}(C \mid B_i)$ pour tout $i \in \{0,1,2\}$.

$$\mathbb{P}(C \mid B_0) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{10}{\frac{8\times7}{2}} = \frac{10}{28} = \boxed{\frac{5}{14}}$$

$$\mathbb{P}(C \mid B_1) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{6}{28} = \boxed{\frac{3}{14}}$$

$$\mathbb{P}(C \mid B_2) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} = \boxed{\frac{3}{28}}$$

/3 **4)** En déduire $\mathbb{P}(C)$.

Par la formule des probabilités totales, comme (B_0, B_1, B_2) forme un S.C.E.,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C) &= \sum_{i=0}^{2} \mathbb{P}(C \mid B_i)\mathbb{P}(B_i) \\
&= \frac{5}{14}\times\frac{2}{9} + \frac{3}{14}\times\frac{5}{9} + \frac{3}{28}\times\frac{2}{9} \\
&= \frac{1}{9\times 14}\times\left(10 + 15 + \frac{3\times 2}{2}\right) \\
&= \frac{1}{9\times 14}\times 28 \\
&= \boxed{\frac{2}{9}}
\end{aligned}$$

5) Sachant que les deux boules du second tirage sont blanches, déterminer la probabilité que le premier tirage n'ait contenu aucune boule blanche. /2

On souhaite calculer $\mathbb{P}(B_0 \mid C)$. Comme $\mathbb{P}(C) > 0$ par la question précédente, on peut appliquer la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}(B_0 \mid C) = \frac{\mathbb{P}(C \mid B_0)\mathbb{P}(B_0)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\frac{5}{14} \times \frac{2}{9}}{\frac{2}{9}} = \boxed{\frac{5}{14}}$$

6) Si deux événements A et B vérifient $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(B \mid A)$, peut-on dire que A et B sont indépendants ? On pourra utiliser les questions
/4 précédentes.

On va construire un contre-exemple avec les événements B_0 et C ci-dessus. Tout d'abord, par les questions précédentes, on a bien :

$$\mathbb{P}(B_0 \mid C) = \frac{5}{14} = \mathbb{P}(C \mid B_0)$$

Pourtant, on va montrer que B_0 et C ne sont pas indépendants. En effet :

$$\mathbb{P}(B_0 \mid C) = \frac{5}{14} \qquad \text{mais} \qquad \mathbb{P}(B_0) = \frac{2}{9}$$

donc $\mathbb{P}(B_0) \neq \mathbb{P}(B_0 \mid C)$. Or, si B_0 et C étaient indépendants, on aurait égalité.

/45,5 2 Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. On dit qu'une variable aléatoire Z suit une *loi de Rademacher* si Z est à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et si

$$\mathbb{P}(Z = -1) = \mathbb{P}(Z = 1) = \frac{1}{2}$$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, qui suivent toutes la loi de Rademacher. *Note : dire que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes revient à dire que pour tout entier $N \geq 2$, les variables aléatoires $X_1, \cdots, X_N$ sont indépendantes.*

Suite en page suivante

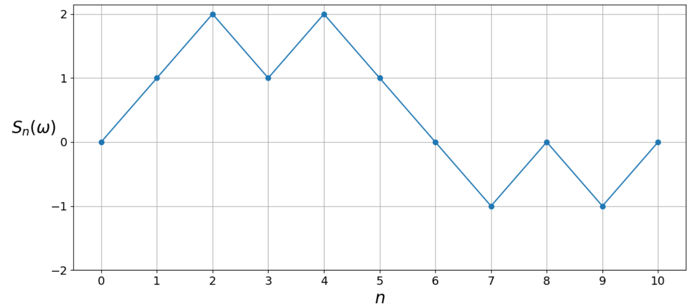

FIGURE 1 – Un exemple où le marcheur arrive en $(10, 0)$ après 10 pas.

On pose $S_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

S_n correspond à la position d'un « marcheur aléatoire » à l'instant n : initialement (instant 0), le marcheur est à la position 0, puis à chaque instant $k \geq 1$ il a une chance sur deux de faire un pas dans la direction $-\infty$ ($X_k = -1$) ou dans la direction $+\infty$ ($X_k = +1$). À tout $\omega \in \Omega$, on peut représenter graphiquement la marche aléatoire en représentant les points $(n, S_n(\omega))$, qu'on relie afin de former une ligne brisée (cf Figure 1 ci-après).

La partie III est indépendante des parties I et II.

Partie I – Position après n pas

/2,5 **1)** Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Calculer $\mathbb{E}(X_i)$ et $\mathbb{V}(X_i)$.

On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_i) &= \sum_{x\in\{-1,1\}} x\mathbb{P}(X_i = x)\\ &= 1 \times \mathbb{P}(X_i = 1) + (-1)\mathbb{P}(X_i = -1)\\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\\ &= \boxed{0}\end{aligned}$$

et par la formule de transfert,

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X_i) &= \mathbb{E}(X_i^2) - \mathbb{E}(X_i)^2\\ &= \sum_{x\in\{-1,1\}} x^2\mathbb{P}(X_i = x) - 0^2\\ &= (-1)^2 \times \mathbb{P}(X_i = -1) + 1^2 \times \mathbb{P}(X_i = 1)\\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\\ &= \boxed{1}\end{aligned}$$

/2,5 **2)** En déduire les valeurs de $\mathbb{E}(S_n)$ et de $\mathbb{V}(S_n)$, puis celle de $\mathbb{E}(S_n^2)$.

On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_n) &= \mathbb{E}(X_1 + \ldots + X_n)\\ &= \mathbb{E}(X_1) + \ldots + \mathbb{E}(X_n)\\ &= \underbrace{0 + \ldots + 0}_{n \text{ fois}} = \boxed{0}\end{aligned}$$

De plus,

$$\mathbb{V}(S_n) = \mathbb{V}(X_1 + \ldots + X_n)$$

Or, $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes, donc

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(S_n) &= \mathbb{V}(X_1) + \ldots + \mathbb{V}(X_n)\\ &= \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ fois}}\\ &= \boxed{n}\end{aligned}$$

Enfin, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_n^2) &= \mathbb{V}(S_n) - \mathbb{E}(S_n)^2\\ &= n - 0^2\\ &= \boxed{n}\end{aligned}$$

/1,5 **3)** Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on définit la variable aléatoire Y_i par $Y_i = \dfrac{X_i + 1}{2}$. Reconnaitre la loi de Y_i (en justifiant).

X_i est à valeurs dans $\{-1, 1\}$, donc $Y_i = \dfrac{X_i + 1}{2}$ est à valeurs dans $\{0, 1\}$.

— $\mathbb{P}(Y_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \dfrac{1}{2}$

— $\mathbb{P}(Y_i = 0) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \dfrac{1}{2}$

On reconnait que $Y_i \sim \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

/3,5 **4)** Justifier que la variable aléatoire définie par $D_n = \dfrac{S_n + n}{2}$ suit une loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{2}$.

On a

$$\begin{aligned}D_n &= \frac{X_1 + \ldots + X_n + n}{2}\\ &= \frac{X_1 + 1}{2} + \ldots + \frac{X_n + 1}{2}\\ &= Y_1 + \ldots + Y_n\end{aligned}$$

Or, $Y_1, \cdots, Y_n$ suivent des lois de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$. De plus, $Y_i = f(X_i)$ avec $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{2}$, et comme $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes, il en va de même pour $Y_1, \cdots, Y_n$. On en conclut que D_n suit une loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{2}$.

/3 **5)** En utilisant la question précédente, retrouver les valeurs de $\mathbb{E}(S_n)$ et de $\mathbb{V}(S_n)$.

Comme $D_n = \dfrac{S_n + n}{2}$, on a $S_n = 2D_n - n$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_n) &= \mathbb{E}(2D_n - n)\\ &= 2\mathbb{E}(D_n) - \mathbb{E}(n)\\ &= 2n \times \frac{1}{2} - n \qquad \text{car } D_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)\\ &= n - n\\ &= \boxed{0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(S_n) &= \mathbb{V}(2D_n - n)\\ &= \mathbb{V}(2D_n)\\ &= 4\mathbb{V}(D_n)\\ &= 4n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \qquad \text{car } D_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)\\ &= \boxed{n}\end{aligned}$$

/4 **6)** Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\mathbb{P}\left(|S_n| \geq n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, comme $\mathbb{E}(S_n) = 0$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(|S_n| \geq n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) &\leq \frac{\mathbb{V}(S_n)}{\left(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)^2}\\ &= \frac{n}{n^{1+2\varepsilon}} \to 0\end{aligned}$$

Partie II – Loi de S_{2n}

/2,5 **7)** Justifier que S_{2n} prend uniquement des valeurs paires et est à valeurs dans $[\![-2n, 2n]\!]$.

On sait que $D_{2n} = \dfrac{S_{2n} + 2n}{2}$, donc $S_{2n} = 2D_{2n} - 2n$. Or, pour tout $\omega \in \Omega$, $D_n(\omega)$ est un entier, donc $S_{2n}(\omega)$ est un entier pair. De plus, comme D_{2n} suit une loi $\mathcal{B}\left(2n, \frac{1}{2}\right)$, elle est à valeurs dans $[\![0, 2n]\!]$. On a donc

$$\begin{aligned} & 0 \leq D_{2n}(\omega) \leq 2n\\ \Longrightarrow\ & 0 \leq 2D_{2n}(\omega) \leq 4n\\ \Longrightarrow\ & -2n \leq 2D_{2n}(\omega) - 2n \leq 2n\end{aligned}$$

si bien que $S_{2n}(\omega) \in [\![-2n, 2n]\!]$

/3 **8)** Montrer que pour tout $k \in [\![-n, n]\!]$, on a $\mathbb{P}(S_{2n} = 2k) = \dfrac{1}{4^n}\dbinom{2n}{n+k}$

Comme on a $D_{2n} = \dfrac{S_{2n} + 2n}{2}$, on en déduit que

$$S_{2n} = 2D_{2n} - 2n$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_{2n} = 2k) &= \mathbb{P}(2D_{2n} = 2n + 2k)\\ &= \mathbb{P}(D_{2n} = n + k)\\ &= \binom{2n}{n+k}\frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2^{2n-n}}\\ &= \boxed{\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n+k}}\end{aligned}$$

/6,5 **9)** Montrer que $\mathbb{E}\left(|S_{2n}|\right) = \dfrac{1}{4^{n-1}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{2n}{n+k}$.

Par la formule de transfert,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(|S_{2n}|\right)\\ &= \sum_{x\in[\![-2n,2n]\!]\cap 2\mathbb{N}} |x|\mathbb{P}(S_{2n} = x)\\ &= \sum_{k=-n}^{n} |2k|\mathbb{P}(S_{2n} = 2k)\\ &= 2\sum_{k=-n}^{n} |k| \times \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n+k}\\ &= 2\left[\sum_{k=-n}^{-1} (-k) \times \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n+k} + 0 + \sum_{k=1}^{n} k \times \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n+k}\right]\\ &= 2\left[\sum_{j=1}^{n} j \times \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n-j} + 0 + \sum_{k=1}^{n} k \times \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n+k}\right] \qquad j = -k\end{aligned}$$

Or,

$$\binom{2n}{n-j} = \binom{2n}{2n-(n-j)} = \binom{2n}{n+j}$$

de sorte que

$$\mathbb{E}(|S_{2n}|) = \frac{2}{4^n}\left[\sum_{j=1}^{n} j\binom{2n}{n+j} + 0 + \sum_{k=1}^{n} k\binom{2n}{n+k}\right]$$
$$= \boxed{\frac{1}{4^{n-1}}\sum_{k=1}^{n} k\binom{2n}{n+k}}$$

10) Pour tout $k \in [\![-n, n]\!]$, réécrire le nombre $(n+k)\binom{2n}{n+k}$ en le mettant sous la forme $a_n b_{n,k}$ avec a_n un entier qui dépend de n et $b_{n,k}$ un coeffficient binomial qui dépend de n et de k.

/3,5

On a

$$(n+k)\binom{2n}{n+k} = (n+k)\frac{(2n)!}{(n+k)!(n-k)!}$$
$$= \frac{(2n)!}{(n+k-1)!(2n-(n+k))!}$$
$$= \frac{(2n)!}{(n+k-1)!(2n-1-(n+k-1))!}$$
$$= 2n\frac{(2n-1)!}{(n+k-1)!(2n-1-(n+k-1))!}$$
$$= \boxed{2n\binom{2n-1}{n+k-1}}$$

11) En déduire que $\frac{1}{2n}\mathbb{E}(|S_{2n}|) = \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$. On admettra les formules suivantes :

$$\sum_{i=0}^{n-1}\binom{2n}{i} = 2^{2n-1} - \frac{1}{2}\binom{2n}{n} \qquad \sum_{i=0}^{n-1}\binom{2n-1}{i} = 2^{2n-2}$$

/5

Par ce qui précède, on a

$$k\binom{2n}{n+k} = 2n\binom{2n-1}{n+k-1} - n\binom{2n}{n+k}$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(|S_{2n}|) = \frac{1}{4^{n-1}}\sum_{k=1}^{n} k\binom{2n}{n+k}$$
$$= \frac{1}{4^{n-1}}\sum_{k=1}^{n} 2n\binom{2n-1}{n+k-1} - \frac{1}{4^{n-1}}\sum_{k=1}^{n} n\binom{2n}{n+k}$$
$$= \frac{2n}{4^{n-1}}\sum_{k=1}^{n}\binom{2n-1}{n+k-1} - \frac{n}{4^{n-1}}\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{n+k}$$

Or,

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{n+k} = \sum_{j=n+1}^{2n}\binom{2n}{j} \qquad j = n+k$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{2n}{2n-i} \qquad i = 2n-j$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{2n}{i}$$
$$= 2^{2n-1} - \frac{1}{2}\binom{2n}{n}$$

et

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{2n-1}{n+k-1} = \sum_{j=n}^{2n-1}\binom{2n-1}{j} \qquad j = n+k-1$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{2n-1}{2n-1-i} \qquad i = 2n-1-j$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{2n-1}{i}$$
$$= 2^{2n-2}$$

si bien que

$$\mathbb{E}(|S_{2n}|) = \frac{2n}{4^{n-1}}2^{2n-2} - \frac{n}{4^{n-1}}\left(2^{2n-1} - \frac{1}{2}\binom{2n}{n}\right)$$
$$= \frac{n}{4^n}\left(2^{2n-1} - 2^{2n-1}\right) + \frac{n}{2\times 4^{n-1}}\binom{2n}{n}$$

et donc

$$\frac{1}{2n}\mathbb{E}(|S_{2n}|) = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} = \boxed{\mathbb{P}(S_{2n} = 0)}$$

12) En déduire un équivalent de $\mathbb{E}(|S_{2n}|)$ quand n tend vers $+\infty$. On admet que $n! \sim \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

/3

Par ce qui précède, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2n}\mathbb{E}(|S_{2n}|) &= \mathbb{P}(S_{2n}=0)\\ &= \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\\ &= \frac{1}{4^n}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\end{aligned}$$

Or, on a

$$(n!)^2 \sim \left(\sqrt{2n\pi}\times\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2 = 2n\pi\times\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}$$

et de plus

$$(2n)! \sim \sqrt{4n\pi}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} = 2\sqrt{n\pi}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|S_{2n}|) &= \frac{2n}{4^n}\times\frac{(2n)!}{(n!)^2}\\ &\sim \frac{2n}{4^n}\times\frac{2\sqrt{n\pi}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2n\pi\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}\\ &= \frac{2\sqrt{n\pi}}{4^n\pi}\times\frac{(2n)^{2n}}{n^{2n}}\\ &= \frac{2\sqrt{n}}{4^n\sqrt{\pi}}\times 2^{2n}\\ &= \boxed{2\sqrt{\frac{n}{\pi}}}\end{aligned}$$

Partie III – Un peu de dénombrement

13) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $b \in [\![0,n]\!]$. Combien de trajets possibles le marcheur aléatoire peut-il emprunter pour relier le point $(0,0)$ au point $(2n,2b)$?

/5

Soit $m \in [\![0,2n]\!]$ le nombre de « montées », i.e. le nombre de fois où le marcheur a progressé de 1 vers $+\infty$ après $2n$ instants. Le marcheur est donc « descendu » $2n-m$ fois. Le marcheur arrive en $(2n,2b)$ si et seulement si $S_{2n}=2b$: il faut donc que

$$\begin{aligned}& m\times 1+(2n-m)\times(-1)=2b\\ \Longrightarrow\ & 2m-2n=2b\\ \Longrightarrow\ & m=n+b\end{aligned}$$

Autrement dit, le marcheur a monté $n+b$ fois au cours des $2n$ instants. Il faut ensuite choisir où les $n+b$ montées ont eu lieu. Cela revient à choisir $n+b$ instants parmi les $2n$ disponibles, soit un total de $\binom{2n}{n+b}$ possibilités. En dehors de ces montées, le marcheur est obligé de descendre. Au final, cela laisse

$$\boxed{\binom{2n}{n+b}\quad\text{trajets possibles}}$$